SIMPSON I CERDÀ: ESBORRANT FRONTERES ENTRE LEIBNIZ I NEWTON

Joaquim Berenguer
jberenguer90@gmail.com

1.- Introducció.

El càlcul diferencial i integral va aparèixer a finals del segle XVII de la mà de Newton i Leibniz i durant el segle XVIII el nou càlcul es va desenvolupar a través d'aquestes dues escoles diferenciades. En particular, aquest nou càlcul es va introduir a Espanya a mitjans del segle XVIII, i un dels seus introductors més destacats va ser el matemàtic i ensenyant Tomàs Cerdà (1715-1791), que va prendre com a guia a un altre matemàtic i ensenyant anglès Thomas Simpson (1710-1761). El paper de la pràctica docent en la configuració d'una disciplina científica és un tema tractat darrerament per diversos autors, així com existeix una abundant literatura sobre les interconnexions entre els dos corrents del càlcul durant els segles XVII i XVIII[1]. No pretenem repetir el que ja ha estat analitzat sota diferents enfocaments sinó simplement presentar el cas de Cerdà i Simpson com un exemple d'aquests dos temes més generals. Per altra banda, hi ha treballs molt rellevants[2] sobre el desenvolupament del càlcul a Espanya, sobre Cerdà i sobre les institucions per on aquest es va moure, que han facilitat la nostra recerca[3].

La nostra aportació, en aquest article, es situa en el marc d'una reflexió general sobre el paper dels ensenyants, com Simpson i Cerdà, en la configuració d'una nova part de la matemàtica com era el càlcul diferencial i integral en el segle XVIII. En aquest sentit, pretenem analitzar els textos d'aquests autors així com la influència dels diferents corrents del càlcul durant aquest segle sobre aquests i més concretament mostrar la influència de determinades nocions leibnizianes, com són els infinitèsims, en l'obra bàsicament newtoni-

1 BOS (1974 i 1980), GUICCIARDINI (1999 i 2009), KNOBLOCK (1990, 2002 i 2006), MALET (1996) i PANZA (2000).

2 AUSEJO i al. (2010), BLANCO (2013), CUESTA DUTARI (1976-1983), GARCÍA DONCEL (1998), GASSIOT (1996), NAVARRO BROTÓNS (2001) i NAVARRO LOIDI (2008).

3 BERENGUER (2015), BERENGUER (2016).

ana tant de Cerdà com de Simpson.

2.- Simpson i Cerdà: professors de matemàtiques.

Simpson no va tenir una formació universitària i el seu origen social no provenia de la noblesa. Efectivament era fill d'un teixidor i la seva formació va ser, per tant, autodidacte. Va començar a ensenyar matemàtiques mentre era teixidor, en el seu temps lliure. Al cap d'uns anys, el nombre dels seus alumnes privats va augmentar tan ràpidament que es va animar a publicar un primer tractat sobre fluxions, *A New Treatise of Fluxions*... el 1737. Posteriorment, va ingressar a la Royal Society i finalment va esdevenir professor de matemàtiques a la Royal Military Academy de Woolwich. El 1750, Simpson va publicar *The Doctrine and Application of Fluxions*, amb el qual presenta el mètode de les fluxions, iniciat per Newton, de forma més sistematitzada i didàctica. Aquest tractat va tenir una àmplia difusió tant a la Gran Bretanya com a tot Europa. De Simpson són de destacar no solament les seves aportacions al camp de l'àlgebra i del càlcul sinó la seva capacitat per transmetre coneixement, particularment entre els seus alumnes. Podem llegir en Clarke (1929), en relació amb la primera publicació de Simpson:

> *"El treball ofereix una mostra de l'habilitat de Simpson com a professor així com en relació amb el seu propi progrés personal sobre el tema, essent la seva presentació prou clara i directa com per poder-se adaptar als estudiants de nivell mitjà"*[4].

Cerdà va ser un jesuïta nascut a Tarragona que durant els seus primers anys d'ensenyant va ser professor de Filosofia i Teologia. L'any 1750 va ser destinat a la Universitat de Cervera com a professor de Filosofia fins al 1753. Posteriorment va ser enviat per la Companyia de Jesús a Marsella on Esprit Pézenas (1692-1776) era el director d'un observatori astronòmic. Cerdà va ensenyar matemàtiques al Col·legi de Cordelles de Barcelona, des del 1756 al 1764. Durant aquest període va publicar un tractat sobre aritmètica i àlgebra

4 CLARKE (1929), 23: "The work gives some indication of Simpson's ability as a teacher of mathematics as well as of his own personal progress in the subject, his presentation being so clear and direct as to adapt it to students of ordinary ability."

i un altre sobre geometria. Del 1765 al 1767 va ensenyar matemàtiques al Colegio Imperial de Madrid.

Cerdà també va preparar molts altres tractats per a ser publicats: el *Tratado de Fluxiones*, Àlgebra aplicada a la Geometria, Mecànica, Astronomia, Òptica, etc., els quals s'han conservat en forma de manuscrit.

Tal com Cerdà escriu en un esborrany d'una carta a Simpson, va prendre el llibre de Simpson, que admirava per la claredat del seu mètode, com model per escriure el seu text sobre fluxions:

> *"(...) ahora dispongo el Tratado de las Fluxiones, en esto te sigo a tí como guía y maestro y como sinceramente reconozco y aunque lea a otros autores, italianos y alemanes que disertan sobre cálculo diferencial e integral, sin embargo todo mi pensamiento está puesto en emularte en la claridad de tu método y me consideraría feliz si (al escribir) mi tratado sobre Fluxiones, este mereciese ser llamado no mío sino tuyo, sobre todo por su doctrina (...)"*[5].

3.- Mètode de les Fluxions o Càlcul Diferencial i Integral: dues visions del Càlcul en el segle XVIII.

Quan Cerdà estava escrivint el seu *Tratado de Fluxiones*, el nou càlcul ja estava dividit en dues visions diferents: la leibniziana i la newtoniana. Tal com Guicciardini (1999) escriu, es poden apuntar algunes diferències rellevants entre aquestes dues visions:

- En la concepció newtoniana les quantitats variables eren concebudes com variant contínuament amb el temps, mentre que en la leibniziana eren concebudes com una successió de valors infinitament propers.
- En el càlcul fluxional el "temps", i, en general, els conceptes cinemàtics, tals com "fluent" i "velocitat", jugaven un paper que no tenien pas en el càlcul diferencial.
- Les quantitats geomètriques eren vistes de diferent manera per Leibniz i per Newton: per a Leibniz una corba era concebuda com un polígon amb un nombre infinit de costats infinitèsims, mentre que per a Newton les corbes eren concebudes com generades pel moviment continu d'un punt.

5 CERDÀ, Tomàs (1758) *Carta a Simpson*, Barcelona. Real Academia de la Historia (RAH), Cortes 9/2792.

És evident que per entendre el concepte de fluxió cal anar a l'obra de Newton. Aquest concepte no va quedar del tot definit en un primer moment i en els mateixos textos de Newton es pot observar una substancial evolució de la noció de fluxió o, si més no, múltiples matisos entorn d'aquesta. Posteriorment, els seus seguidors van continuar aprofundint i modificant l'inicial concepte de fluxió newtonià.

És en el *Tractatus de Methodis Serierum et Fluxionum* (1671) on van aparèixer, per primera vegada, els elements bàsics del càlcul fluxional de forma sistematitzada i sobre tot va aparèixer el concepte de fluxió com un concepte que intentava generalitzar els resultats anteriors. Newton, en les seves primeres línies dedicades al mètode de les fluxions, diu que tots els problemes relacionats amb les corbes es resumiran en dos:

> **I**. Essent la Longitud de l'Espai descrita contínuament (és a dir, per tot el Temps), trobar la Velocitat del Moviment per qualsevol Moment proposat.
> **II**. Essent la Velocitat del Moviment contínuament donada, trobar la Longitud de l'Espai descrit per qualsevol Moment proposat[6].

Un dels interessos de Newton era estudiar la naturalesa de les corbes. Aquestes seran concebudes, per a ell, com generades per un moviment on el temps juga el paper de variable continua. Anomena quantitats fluents a aquelles quantitats que poden ser augmentades gradualment i indefinidament i les fluxions seran les velocitats amb què les fluents són augmentades pel moviment que les produeix[7].

A continuació introdueix el concepte de "moment" com una part infinitament petita corresponent al creixement d'una quantitat, proporcional a la velocitat:

6 NEWTON (1671), 19:
"I. *The Length of the Space described being continually (that is, at all Times) given; to find the Velocity of the Motion at any Time proposed.*
II. *The Velocity of the Motion being continually given; to find the Length of the Space described at any Time proposed*".

7 Ibid, 20: "Now those Quantities which I consider as gradually and indefinitely increasing, I shall hereafter call Fluents, or Flowing Quantities, [...] And the Velocities by which every Fluent is increased by its generating Motion, (which I may call Fluxions, or simply Velocities or Celerities) I shall represent by the same Letters pointed thus i . That is, for the Celerity of the Quantity v I shall put $\dot{v}$, and so for the Celerities of the other Quantities x, y, and z, I shall put , and respectively."

"13. Els moments de les Quantitats fluents, (és a dir, les seves indefinidament petites Parts, a partir de les quals, en indefinidament petits intervals de Temps, són contínuament augmentades) són com les Velocitats de seu Fluir o Augment.

14. Si el Moment de qualsevol quantitat, com x, està representat per el Producte de la seva Velocitat $\dot{x}$ per una indefinidament petita Quantitat o (és a dir, per $\dot{x}\,o$) els Moments de les altres v, y, z, estaran representats per $\dot{v}\,o$, $\dot{y}\,o$, $\dot{z}\,o$; ja que $\dot{v}\,o$, $\dot{x}\,o$, $\dot{y}\,o$ i $\dot{z}\,o$, estan una a altra com $\dot{v}$, $\dot{x}$, ,$\dot{y}$ i ($\dot{z}$)"[8].

A partir d'aquí mostra uns quants exemples de com obtenir les fluxions d'algunes funcions algebraiques per, finalment, explicar com ha deduït les regles que acaba d'aplicar. Per trobar la raó entre les fluxions de dues variables que defineixen una corba, el que es tracta és de substituir x i y per aquestes mateixes quantitats incrementades pels seus moments respectius, és a dir per $x + \dot{x}\,o$ i $y + \dot{y}\,o$. Així per una equació $x^3\text{-}ax^2\text{+}axy\text{-}y^3\text{=}0$, després de substituir x i y per $x + \dot{x}\,o$ i $y + \dot{y}\,o$, respectivament, arriba a l'expressió
$3\,\dot{x}\,x^2\text{+}3\,\dot{x}^2\,ox + x^3\,oo - 2a\,\dot{x}\,x\text{-}a\,\dot{x}^2\,o + a\,\dot{x}\,y\;a\,\dot{y}\;x\;a\,\dot{x}\,\dot{y}o - 3y\,\dot{y}^2 - 3\dot{y}^2\,oy - \dot{y}^3\,oo\text{=}0.$
En aquesta expressió descarta els termes multiplicats per o, per ser infinitament petits en relació amb els altres, i finalment arriba a l'equació que relaciona les fluxions de les dues variables: $3\,\dot{x}\,x^2\text{-}2a\,\dot{x}\,x\text{+}a\,\dot{x}\,y\text{+}a\,\dot{y}\,x\text{-}3\,\dot{y}\,y^2\text{=}0$ [9].

En relació amb el desenvolupament del càlcul diferencial al continent europeu, s'ha de dir que tot el seu fonament teòric es recolzava en el concepte de "diferència" o diferencial[10]. Per a Leibniz, la diferencial d'una variable

8 Cal tenir en compte que tot el text citat de Newton prové de la versió anglesa de l'original *Tractatus de Methodis Serierum et Fluxionum* (1671) traduïda i publicada per John Colson el 1736, on la notació inicial de fluxió que havia utilitzat Newton ha estat substituïda per la del puntet sobre la variable. Ibid, 24:
"13.The moments of flowing Quantities, (that is, their indefinitely small Parts, by the accession of which, in indefinitely small portions of Time, they are continually increased,) are as the Velocities of their Flowing or Increasing.
14.Wherefore if the Moment of any one, as x, be represented by the Product of its Celerity $\dot{x}$ into an indefinitely small Quantity o (that is, by $\dot{x}\,o$) the Moments of the others v, y, z, will be represented by $\dot{v}\,o$, $\dot{y}\,o$, $\dot{z}\,o$; because $\dot{v}\,o$, $\dot{x}\,o$, $\dot{y}o$ and $\dot{z}\,o$, are to each other as $\dot{v}$, $\dot{v}$, $\dot{y}$ and $\dot{z}$."

9 Ibid, 24: "17. Now by Supposition $x^3\text{-}ax^2\text{+}axy\text{-}y^3\text{=}0$ which therefore being expunged, and the remaining Terms being divided by ï, there will remain $3\,\dot{x}\,x^2\text{+}3\,\dot{x}^2\,ox\text{+}\,\dot{x}^3\,oo\text{-}2a\,\dot{x}\,x\text{-}a\,\dot{x}^2\,o\text{+}a\,\dot{x}\,y\text{+}a\,\dot{y}\,x\text{+}a\,\dot{x}\,\dot{y}\,o\text{-}3\,\dot{y}\,y^2\text{-}3\,\dot{y}^2\,oy\text{-}\,\dot{y}^3\,oo\text{=}0$. But whereas î is supposed to be infinitely little, that it may represent the Moments of Quantities; the Terms that are multiply'd by it will be nothing in respect of the rest. Therefore I reject them, and there remains $3\,\dot{x}\,x^2\text{-}2a\,\dot{x}\,x\text{+}a\,\dot{x}\,y\text{+}a\,\dot{y}\,x\text{-}3\,\dot{y}\,y^2\text{=}0$."

10 DE LORENZO (1987).

y era la diferència infinitament petita entre dos valors successius de *y*[11]. El càlcul diferencial leibnizià girarà al voltant d'aquesta noció així com de la idea de la corba com col·lecció d'un nombre infinit de segments infinitament petits. Molt lluny, per tant, de la visió de les quantitats generades pel moviment dels newtonians.

Més endavant, la definició de diferencial que va donar el Marquès de L'Hôpital (1661-1704) el 1696 va incorporar un nou matís, la noció de continuïtat, que recordava la del moviment generador newtonià: "La part infinitament petita que una quantitat variable augmenta o disminueix contínuament, és anomenada la Diferència"[12].

Una de les característiques més rellevants del corrent leibnizià va ser el desenvolupament posterior de tota una teoria sobre els infinitèsims. Christian Wolff (1679-1754) serà un dels primers en tractar aquesta teoria en els seus *Elementa Matheseos Universae* (1713-1715).

Molts dels tractats de càlcul diferencial del continent començaran amb l'anàlisi dels Infinits, on també s'analitzarà el que s'entén per quantitat infinitesimal, més endavant denominada quantitat diferencial. Particularment a Espanya és rellevant el de Pedro Padilla (1724-1807?) que s'inspira en els *Eléments de la Géometrie de l'infini* de Bernard le Bovier Fontenelle (1657-1757) per escriure el primer capítol "De las cantidades infinitas" del Tomo V del seu *Curso militar de Mathematicas* (1753-1756) o el text, conservat en forma de manuscrit, de Johannes Wendlingen (1715-1790) que segueix fidelment el text de Wolff.

Per altra banda, l'evolució posterior de les bases teòriques del mètode de fluxions va estar estretament relacionada amb l'intent d'evitar els infinitèsims, gir que ja havia iniciat el mateix Newton[13]. Aquest autor ja havia mostrat la seva preocupació per l'ús dels infinitèsims com eina demostrativa vàlida i per aquesta raó havia vist la necessitat de desenvolupar una forma sintètica (geomètrica) del mètode de les fluxions, és a dir una versió on no apareguessin les quantitats infinitesimals, basada en una idea molt propera a la de límit dins una concepció geomètrico-cinemàtica. En els *Principia*, després l'enunciat d'una sèrie de lemes que expliquen el nou mètode sintètic del

11 BOS (1980).

12 L'HÔPITAL (1696); 2: "La portion infiniment petite dont une quantité variable augmente ou diminue continuellement, en est appellée la Différence."

13 Per analitzar més a fons el paper dels infinitèsims en els inicis del càlcul diferencial veure JULLIEN (2015).

mètode de fluxions, Newton escriu que aquest mètode evita el llarg procés dels geòmetres grecs i també la teoria dels indivisibles[14] amb insuficient validesa geomètrica, consistint en el límit de les sumes o les raons de les quantitats naixents o evanescents:

> *"Aquests Lemes s'enuncien com a premisses per evitar el tedi de deduir llargues demostracions per reducció a l'absurd, seguint el costum dels antics geòmetres. Ja que el mètode dels indivisibles abreuja les demostracions. Però com la hipòtesi dels indivisibles sembla d'alguna manera més ruda i, per aquest motiu, és considerada menys geomètrica com a mètode, he preferit reduir les demostracions de les proposicions següents a les primeres i darreres sumes i raons de quantitats naixents i evanescents, és a dir, als límits d'aquestes sumes i raons, enunciant així de la forma més breu possible com premisses la demostració d'aquests límits"*[15].

Posteriorment, tant *The Elements of the Method of Fluxions, demonstrated after the Manner of Ancient Geometricians* (1742) de Colin Maclaurin (1698-1746) com *The Doctrine and Application of Fluxions* (1750) de Simpson van establir les bases geomètrico-cinemàtiques del mètode de les fluxions i van donar una definició de fluxió on els infinitèsims no tenien cabuda, convertint-se, així, en els textos de referència per la comunitat newtoniana. De manera que va aparèixer un nou element diferenciador, l'ús dels infinitèsims, entre els fluxionistes i els leibnizians i alguns autors del moment, en ocasions, van dibuixar una frontera entre els dos corrents, en aquest sentit. Així, Christian Rieger (1714-1780) a l'inici del seu tractat sobre fluxions, *Introducción fácil al algoritmo de fluxiones* (1761-1765) escriu que l'ús dels infinitèsims comporta problemes de caire metafísic que cal evitar i els únics principis vàlids són els basats en la geometria i la cinemàtica:

> *"Para evitar algunas dificultades metafísicas que nacen en estos cálculos acer-*

14 Veure MASSA (2015).

15 NEWTON (1687); "Book1, Section I", 102: "These Lemmas are premised to avoid the tediousness of deducing perplexed demonstrations *ad absurdum*, according to the method of the ancient geometers. For demonstrations are more contracted by the method of indivisibles: but because the hypothesis of indivisibles seems somewhat harsh, and therefore that method is reckoned less geometrical, I chose rather to reduce the demonstrations of the following propositions to the first and last sums and ratios of nascent and evanescent quantities, that is, to the limits of those sums and ratios".

> *ca de los elementos infinitamente pequeños, no usaremos aquí otras ideas, ni principios sino los que se infieren claramente de la doctrina elemental de la geometría y del movimiento"*[16].

Tot i així, molts altres autors de l'època van considerar que els dos càlculs: el càlcul leibnizià i el fluxional de Newton tenien molt en comú i es podien traduir un a l'altre. De manera que uns i altres, seguidors de les dues escoles, sovint feien referència a l'altra visió, minimitzant les diferències entre les dues. Wendlingen, apropiant-se de les paraules de Wolff, quan es refereix a Newton, en el seu text sobre càlcul infinitesimal, fa una singular simbiosi dels conceptes de fluxió i diferencial[17].

3.1- Simpson: un deixeble newtonià promovent el mètode analític?

En una situació en que alguns tractats sobre càlcul diferencial no donaven massa importància a l'opció de la visió adoptada, com si aquesta gairebé només fos un problema notacional, ja que a la fi s'arribava als mateixos resultats, la posició clarificadora, tant de Simpson com de Cerdà resulta particularment rellevant. Simpson i Cerdà eren perfectament conscients de quines eren les diferències i quines les semblances de les dues visions, i de forma inequívoca van defensar la concepció newtoniana sobre unes sòlides bases teòriques, tot essent receptius a les influències leibnizianes.

Simpson, en el seu llibre *Doctrine and Application of Fluxions*, manifesta el seu total acord amb la visió geomètrico-cinemàtica newtoniana tot i que matisa la definició de la fluxió que adoptarà. Reconeixent la influència del seu amic Francis Blake (1708-80), Simpson explica que no es pot considerar la fluxió com una simple velocitat –com fa Newton– sinó que cal considerar-la com un increment d'espai que seria generat uniformement en un temps donat:

> *"Cada Quantitat així generada és anomenada una variable, o Quantitat fluent. I la Magnitud amb que qualsevol Quantitat fluent seria incrementada uniformement en un determinat Interval de Temps, amb la Velocitat generadora a una Posició donada, o Instant (continuant invariable des d'aquest punt)*

16 RIEGER, *Introducción fácil al algoritmo de las fluxiones*.

17 WENDLINGEN, *Elementos de Mathematicas*. Tomo VIII. Análisis de los Infinitos.

és la Fluxió de la Quantitat donada en aquesta posició"[18].

Simpson adopta, en aquest text, el concepte de fluxió com increment finit "condicional" de la variable, entre altres raons, per tal de procurar evitar els infinitèsims, tal com ell mateix ho escriu en el prefaci del seu llibre:

> *"Aquí, certament, les fluxions no es poden expressar mitjançant un increment o espai generat en un temps donat (com en el moviment uniforme). Però podem fàcilment determinar l'increment instantani o l'espai generat que podria ser , si l'acceleració o el retard deixés d'actuar en la posició en la qual es vol trobar la fluxió. D'aquesta manera la veritable fluxió podrà ser obtinguda sense recórrer a quantitats infinitament petites o a consideracions metafísiques"*[19].

Altres newtonians, tals com William Emerson (1701-1782)[20], no van estar d'acord amb aquesta nova definició de fluxió i van creure necessari mantenir els infinitèsims així com els moments que Newton ja utilitzava[21]. En qualsevol cas, tots els fluxionistes van recollir el nucli vertebrador de la visió newtoniana: la idea que qualsevol quantitat matemàtica es pot veure com generada per un moviment, on el temps és el paràmetre sempre present.

Tot i així, probablement Simpson va ser el menys newtonià dels seguidors del càlcul fluxional i va avançar cap un mètode analític, iniciat per Viète i seguit per Descartes i d'altres, més proper als matemàtics continentals. Així, podem llegir una decidida defensa de l' "Anàlisi moderna" que era practicada pels "Matemàtics estrangers", en el Prefaci del seu *Miscellaneous tracts* (1757):

---

18 SIMPSON (1750), Part I, 1: "Every Quantity so generated is called a variable, or flowing Quantity: And the Magnitude by which any flowing Quantity would be uniformly increased in a given Portion of Time, with the generating Celerity at any proposed Position, or Instant (was it from thence to continue invariable) is the Fluxion of the said Quantity at that Position, or Instant".

19 Ibid, Preface, VII: "Here, indeed, we cannot express the Fluxion by any Increment or Space, actually, generated in a given Time (as in uniform Motions). But, then, we can easily determine, what the contemporary Increment, or generated Space *would be*, if the Acceleration, or Retardation, was to cease at the proposed Position in which the Fluxion is to be found. Whence the true Fluxion, itself, will be obtained, without the Assistance of infinitely small Quantities, or any metaphysical Considerations.

20 William Emerson va publicar *The Doctrine of Fluxions* (1743) on opta per mantenir la fluxió com a velocitat i el concepte de "moment" com un increment infinitament petit.

21 Veure CLARKE (1929).

> *"No puc ser de l'opinió d'aquells que desaproven qualsevol cosa obtinguda mitjançant símbols i a partir d'un procés algebraic; ja que, tot i que el mètode Sintètic és millor en qualsevol cas, hi ha innumerables investigacions sobre la natura, com també en la ciència abstracta, on aquest no pot ser aplicat […]"*[22].

Però la seva aproximació al càlcul diferencial continental no era perquè abandonés la visió geomètrico-cinemàtica sinó perquè va clarificar quins eren els punts teòrics de connexió entre les dues visions i d'aquesta manera es va acostar molt a la "superació" de les distàncies teòriques entre leibnizians i newtonians. Simpson sabia molt bé que, de fet, era possible una traducció entre l'algorisme fluxional i el diferencial, però, això ho veia com possible a partir de mostrar el lligam que hi havia entre els dos conceptes principals: la diferencial i la fluxió. Podem llegir en l '*Escoli* (p. 150) del seu llibre *The Doctrine and Application of Fluxions* (1750) una idea que s'acosta molt al concepte de límit. Concretament diu que quan els increments infinitesimals són presos suficientment petits llavors la raó entre ells coincideix amb la raó de les fluxions. Per tant, aquí Simpson parla de raó de fluxions. Reconeix que el mètode dels infinitèsims té l'avantatge que en aquest no s'han d'introduir les propietats del moviment, des del moment que es raona a partir dels increments mateixos i no sobre la manera de ser generats. I va més enllà, referint-se a la raó límit dels increments. Afirma que la raó d'uns increments, que cada cop es fan més petits, convergeix, abans que (aquests increments) desapareguin, més a prop que qualsevol diferència cap a la raó de les fluxions, per tant podem identificar una amb l'altra:

> *"Ha estat assenyalat abans, que, encara que els Increments de les Quantitats no són, estrictament, les Fluxions, a partir d'aquests es pot deduir la Raó de les Fluxions; i apareix que com més petits es prenen aquests Increments, més la seva Raó s'aproximarà a la de les Fluxions. Per tant, si podem, d'alguna manera, trobar la Raó a la qual aquests Increments, concebent-los més i més petits, convergeixen contínuament, i a la qual aquests poden aproximar-se, abans que desapareguin, més a prop que qualsevol Diferència donada, aquesta Raó (anomenada per tal de distingir-la, la Raó límit dels Increments) serà,*

22 SIMPSON (1757), Preface: "I cannot be of the opinion of Those who affect to shew a dislike to every thing performed by means of symbols and an algebraic Process; since, so far is the Synthetic method from having the advantage in all case, that there are innumerable enquiries into nature, as well as in abstracted science, where it cannot be at all applied [...]."

estrictament, la de les Fluxions"[23].

Efectivament, Simpson vol mostrar com és possible utilitzar el mètode de les diferencials per deduir fluxions i, en el mateix Escoli es pot llegir el següent exemple:

1º *Es proposa determinar la Raó de les Fluxions de x i x^2.*

Ara, si es suposa que x és augmentada per una Quantitat qualsevol (petita) $\acute{x}$, esdevenint $x + \acute{x}$, el seu Quadrat (x^2) quedarà augmentat en $\overline{x+ \acute{x}}^2 = x^2+2x\ \acute{x} + \acute{x}\acute{x}$, llavors l'Increment de x^2 serà $2x\acute{x} + \acute{x}\acute{x}$, el qual, per tant, és a ($\acute{x}$) l'Increment de x, com $2x + \acute{x}$ és a 1.

Llavors, ja que la lletra x pot ser presa [eliminada], aquesta Raó s'aproxima a la de $2x$ és a 1, la qual és el seu *Límit*, la Raó de les Fluxions s'expressarà, per tant, per $2x$ a 1. O, el que és el mateix, per $2x\dot{x}$ a $\dot{x}$[24].

Cal observar que Simpson, quan vol mostrar, en aquest text, la forma d'operar amb diferencials, té la precaució de no utilitzar la mateixa notació ($\acute{x}$) que la de la fluxió ($\dot{x}$)[25]. Simpson amb aquest exemple està acceptant la validesa del càlcul diferencial, tot i que ell prefereixi moure's dins la concepció geomètrico-cinemàtica.

23 SIMPSON (1750), 152: "It has been hinted above, that, though the Increments of Quantities are not, *strictly*, as the Fluxions, yet from them the Ratio of the Fluxions may be deduced; and it appears that the smaller those Increments are taken, the nearer their Ratio will approach to that of the Fluxions. Therefore, if we can, by any Means, find the Ratio to which the said Increments, by conceiving them less and less, do perpetually converge, and which they may approach, before they vanish, nearer than any assignable Difference, that Ratio (called here after for Distinction Sake, *the Ratio limiting that of Increments*) will be, *strictly*, that of the Fluxions."

24 SIMPSON (1750), 153: "1º Let it be proposed to determine the Ratio of the Fluxions of x and x^2. Now, if x be supposed to be augmented by any (small) Quantity $\acute{x}$, so as to become $x+\acute{x}$, its Square (x^2) will be augmented to $\overline{x+ \acute{x}}^2 = x^2+2x\ \acute{x} + \acute{x}\ \acute{x}$, ; whence the Increment of x^2 will be $2x\acute{x} +\acute{x}\acute{x}$; which therefore is to ($\acute{x}$) the Increment of x, as $2x+\acute{x}$ to 1.
Hence, because the letter is taken, the nearer this Ratio approaches to that of *2x* to 1, which is its *Limit*, the Ratio of the Fluxions will therefore be expressed by that of *2x* to 1, or, which is the same, by that of $2x\acute{x}$ to $\acute{x}$."

25 Aquesta notació per als increments infinitament petits apareix en altres tractats de l'època sobre fluxions.

3.2.- L'opció de Cerdà: una visió newtoniana utilitzant algunes eines leibnizianes.

De la mateixa manera, Cerdà seguirà a Simpson a l'hora d'establir les diferències entre la visió newtoniana i la leibniziana. D'entrada, aquest autor assumeix totalment, com ell mateix diu, el "Método de las fluxiones", és a dir la visió geomètrico-cinemàtica newtoniana, adoptant la mateixa definició de fluxió de Simpson. La fluxió, ara, no serà tant la velocitat sinó un increment finit, proporcional a aquesta velocitat, exactament, l'increment de la variable si la velocitat es mantingués constant:

> *"Para comprender perfectamente el Método de las Fluxiones, téngase presente que toda Magnitud Geométrica se reduce a Línea, Superficie o Plano y Sólido. La Línea se concibe formada por el Movimiento continuo de un Punto que la describe, la Superficie por el movimiento continuo de una Línea y el Sólido o Cuerpo por el movimiento continuo de una superficie o Plano, y aquella parte de Línea, superficie o Sólido que describiera el Punto, Línea o Figura generatriz en un tiempo dado, si perseverase constante e invariable en la velocidad, que en algún punto o posición determinada tiene, es la que llamamos Fluxión en aquel punto de la tal cantidad que así se forma, llamada por esto Fluente"* [26].

Un cop donada la definició de fluxió, Cerdà establirà les diferències entre aquesta "fluxió" newtoniana i la "diferència" leibniziana. En el seu tractat, *Tratado de Fluxiones*, es pot llegir una reflexió on es diu que, tot i que els resultats són els mateixos des de les dues visions, la fluxió és un increment *condicional*, que es produiria si la velocitat del moviment generador es mantingués constant mentre que la diferencial, per als leibnizians, és un increment infinitament petit que *realment* es produeix. Només en cas que el moviment sigui uniforme els resultats seran iguals:

> *"En este Cálculo Diferencial se hacen las operaciones como en el Método Directo de las Fluxiones y salen los mismos resultados, aunque es forzoso confesar haber alguna diferencia entre estas infinitésimas y las que nosotros llamamos Fluxiones. Hemos inculcado bastante que Fluxión es el Espacio*

26 CERDÀ, *Tratado de Fluxiones*, "Capitulo 1. Explícase la Naturaleza de las Fluxiones"; RAH, 9/2812 f. 85r.

o partes que describiera la Figura generatriz si prosiguiese constante con el movimiento que en una posición dada tiene. Los que siguen el Cálculo Diferencial llaman Diferencia no lo que la Figura generatriz describiera sino lo que actualmente describe y así en las Cantidades que se forman con movimiento uniforme lo mismo es la Fluxión, que la Infinitésima, por ser el mismo Espacio que describiera la Figura generatriz, que el que actualmente describe" [27].

Però quan el moviment deixa de ser uniforme la fluxió i els infinitesimals deixen de ser iguals. Cerdà ho expressa així:

"Pero en las Cantidades que se forman por movimiento variable no es el mismo el espacio que se describiera, que el que actualmente se describe, por aumentarse, o disminuirse en el entretanto la velocidad, y así en estos casos no es lo mismo la Fluxión que la Infinitésima"[28].

Aquest mètode dels infinitèsims el segueixen els alemanys, els italians i els francesos:

"Siguen por lo común el método de los infinitésimos los Alemanes, los Italianos y los Franceses, pero mirados los movimientos por una y otra parte me parece más del caso seguir el Método de las Fluxiones, que siguen comúnmente los Ingleses con su autor Newton"[29].

Però la influència leibniziana sobre Cerdà és evident i en relació amb aquesta influència, volem centrar-nos en dos aspectes. El primer fa referència a la notació utilitzada per Cerdà en el seu tractat de fluxions. El segon fa referència a l'aparició de conceptes clarament leibnizians en el seu discurs sobre el càlcul de fluxions quan es tracta d'aplicar-lo a diferents qüestions geomètriques.

Cerdà, com molts dels seus contemporanis matemàtics a Espanya, va entrar en contacte amb els dos corrents del càlcul diferencial a Europa i va decidir la notació que va creure més convenient. A més de Simpson, va llegir

27 Cerdà, *Tratado de Fluxiones*, "Cap 4. De las Fluxiones Superiores"; RAH, 9/2792/28 f. 2v.

28 Ibid.

29 Ibid.

nombrosos autors francesos i alemanys, com ell mateix diu. I finalment va assumir plenament la concepció geomètrico-cinemàtica de Newton i la definició de fluxió de Simpson.

Malgrat aquesta opció, en els seus textos, Cerdà prefereix la notació leibniziana. Allà on Simpson escriu $\dot{x}$, Cerdà escriu dx. No és fàcil trobar algun matemàtic de l'època que fes una cosa semblant, és a dir que, treballant amb les fluxions newtonianes, utilitzés la notació leibniziana. L'Hôpital o Wolff, leibnizians, van utilitzar la notació diferencial. Maclaurin o Simpson, newtonians, van utilitzar el puntet. I a Espanya, els que seguien la visió leibniziana com Padilla o Wendlingen eren fidels a la notació leibniziana, mentre que un newtonià com Rieger era fidel al puntet sobre la variable. I tot això resulta encara més sorprenent tenint en compte que aquests darrers eren col·legues de Cerdà, al *Colegio Imperial* de Madrid.

No resulta desencertat considerar com element rellevant per l'adopció de la notació leibniziana les limitacions o exigències de la impremta, com el mateix Cerdà reconeix. Però, veure el tema de la notació només com una qüestió formal o lligada a les exigències de la impremta pot resultar esbiaixat. Efectivament la notació adoptada per un determinat home de ciència mai és solament una qüestió de forma i sempre al darrere d'aquesta hi ha una determinada concepció teòrica del problema tractat. De fet, la substitució per part de Cerdà de la $\dot{x}$ per la dx, no s'hauria produït si no hagués hagut la comprensió d'aquests dos conceptes. La fluxió que defineix Newton s'acosta molt a la velocitat de la variable, però la que adopta Simpson és un increment finit. La definició de diferencial leibniziana també correspon a un increment. I, encara que Cerdà sabia que no es tractava del mateix tipus d'increment, no va tenir cap inconvenient en adoptar una notació "més pràctica" per designar el concepte de fluxió newtonià, modelat per Simpson.

Per altra banda, tot i que Cerdà es declara seguidor de Newton i, de fet, segueix el guió del llibre de Simpson, la terminologia utilitzada en una primera versió del seu tractat té freqüents referències leibnizianes. Però no es tracta exclusivament de terminologia o notació sinó de conceptes arrelats en la visió continental del càlcul diferencial els que apareixen en determinades ocasions en l'obra de Cerdà.

En el següent exemple que volem mostrar, Cerdà es desmarca de Simpson, mostrant una clara influència leibniziana. Es tracta de la introducció de la quadratura d'una àrea, del tractat de Cerdà, on l'autor estableix l'equivalència entre l'operació de calcular la fluent a partir de la fluxió –com ho fa Simpson–

i la de calcular una suma d'infinits termes:

> *"Cuadrar una curva es encontrar el área de su plano y cómo este plano no es otra cosa que la suma de todas las fluxiones que son rectángulos, según vimos al principio, todo el arte de esta cuadratura se reducirá, dada su Ecuación de la curva, buscar la fluxión de su plano y encontrada ésta, integrando dicha fluxión se tendrá la fluente que es la suma de todas las fluxiones que la componen"*[30].

Com es pot veure, Cerdà manté la terminologia leibniziana però a més a més considera que quadrar una corba és calcular la suma de les seves fluxions. La idea de que l'àrea per sota una corba és la suma de rectangles infinitament petits és prou potent com perquè Cerdà la mantingui i es permeti identificar la fluxió de l'àrea amb un increment infinitament petit, tot i que, en altres parts del seu tractat, hagi refusat la identificació entre fluxió i increment infinitament petit.

4.- Simpson i Cerdà: dos newtonians que no sempre eviten els infinitèsims.

Tot seguit, mostrarem tres exemples de les obres de Simpson i de Cerdà, sensibles a la influència leibniziana, on es pot comprovar fins a quin punt els infinitèsims estan presents en aquestes malgrat la presa de posició inicial en contra de les quantitats infinitesimals.

1) Com ja ha estat dit, Simpson admet com a vàlid aplicar el mètode de les diferencials i de fet, en algunes ocasions, en el seu llibre *The Doctrine and Application of Fluxions*, l'aplica com a forma alternativa al càlcul de fluxions.

Així es pot veure quan tracta de la rectificació de corbes donades en "coordenades polars"[31]:

30 CERDÀ, Tomàs, *Tratado de Fluxiones*, "Cap. [11] Aplicación del Método inverso de las Fluxiones para la Cuadratura de las curvas"; RAH, 9/2792/46 f. 13r.

31 SIMPSON (1750), 157.

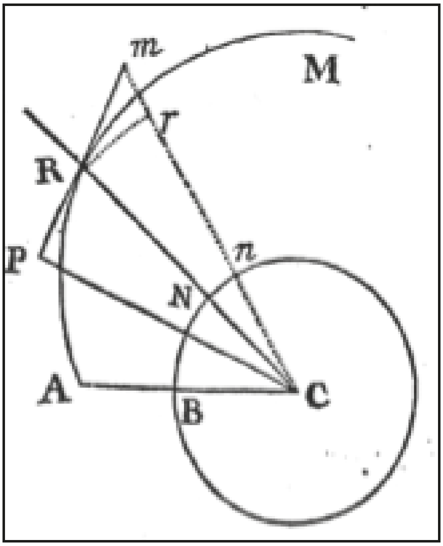

Fig. 1. SIMPSON (1750), 157.

Es tracta de la corba *ARM*, generada per la línia recta *CR*, que gira al voltant del centre *C*. Tenim que a = radi = CN = CB, x = arc BN, y = CR, z = AR. La velocitat de x ($\dot{x}$) és constant però no la de y ($\dot{y}$), per tant la de z ($\dot{z}$) també és variable. L'objectiu és rectificar la corba z, és a dir, calcular-ne la longitud. Ho fa a partir de calcular la fluxió, $\dot{z}$, d'aquesta corba. La demostració és llarga i en aquesta s'utilitza un lema que Simpson ha introduït, abans, expressament per evitar els infinitèsims, on, finalment, el resultat és $\dot{z} = \sqrt{((y^2\, \dot{x}^2)/a^2 + \dot{y}^2)}$.

Però, al final d'aquesta demostració es pot llegir:

> *"Però la mateixa Conclusió pot ser més fàcilment deduïda a partir dels Increments de les Quantitats fluents, segons l'Escoli*[32] *precedent.*
> *Ja que si s'assumeix que Rm, rm i Nn representen ($\acute{z}$, $\acute{y}$ i $\acute{x}$) uns Increments molt petits corresponents a AR, CR i BN, serà CN (a) : CR (y) :: $\acute{x}$ (el Arc Nn) : l'Arc semblant Rr = $y\,\acute{x}/a$. I, si es considera que el Triangle Rrm (el qual, mentre el Punt m està retrocedint cap a R, s'aproxima contínuament més i més a una Semblança amb CRP) com rectilini, obtindrem $\acute{z}^{\,2}$ (= $Rm^2 = Rr^2 + rm^2$) = ($y^2\ \acute{x}^{\,2}/a^2 + \acute{y}^{\,2}$; d'on, escrivint $\dot{z}$,$\dot{x}$ i $\dot{y}$ en lloc de $\acute{z}$, $\acute{x}$ i $\acute{y}$ (segons l'Escoli)*

32 Aquest escoli és el que s'ha explicat anteriorment, en el qual relaciona les diferències leibnizianes amb les fluxions newtonianes.

resulta $(y^2 \dot{x}^2)/a^2 + \dot{y}^2$, *com abans"*[33].

En definitiva sembla que Simpson reconegui que resulta molt més senzill treballar amb infinitèsims, tenint en compte que "en el límit" podem substituir-los per les fluxions.

2) Cerdà, quan tracta el tema de les rectificacions, no recull la darrera part de Simpson, fent ús dels infinitèsims. Però la reflexió que Cerdà fa en aquest apartat torna a recordar una concepció totalment leibniziana quan diu que, de fet, una corba és la suma d'infinites rectes "molt petites" (espais que descriuria cada punt, per tant, fluxions) i que integrant, és a dir, sumant, obtindrem la longitud de la corba:

> *"Ya se deja ver que este Método se funda en que la línea curva se forma de infinitas rectas pequeñísimas que son los espacios que describiría el punto que la forma, esto es las fluxiones, por consiguiente integrando o sumando todas las fluxiones tendremos el valor de la tal línea, como se verá en los problemas siguientes"*[34].

3) El darrer exemple que es vol mostrar correspon a la introducció del capítol dedicat a la curvatura. Es tracta de trobar el radi de curvatura d'una determinada corba i, en primer lloc, tant Simpson com Cerdà, el calculen a partir del cercle osculador. A continuació, presenten una manera alternativa de calcular aquest radi de curvatura on intervé la idea d'un increment infinitament petit:

> *"Hasta aquí hemos buscado el Radio de Curvatura de las curvas valiéndonos de su Círculo Osculador al tal punto, pero independientemente del Círculo lo podremos encontrar de esta suerte".*

33 Simpson (1750), 158: "For, if *Rm*, *rm* and *Nn* be assumed to represent ($\acute{z}$, $\acute{y}$ and $\acute{x}$) any very small corresponding Increments of *AR*, *CR* and *BN*, it will be as *CN* (*a*) : *CR* (*y*) :: $\acute{x}$ (the Arch *Nn*) : the similar Arch *Rr* = (y $\acute{x}$)/a. And, if the Triangle *Rrm* (which, while the Point *m* is returning back to *R*, approaches continually nearer and nearer to a Similitude with *CRP*) be considered as rectilineal, we shall also obtain $\acute{z}^2$ (= Rm^2= $Rr^2 + rm^2$)= $y^2 \acute{x}^2$)/$a^2 + \acute{y}^2$: Whence, by writing $\dot{z}$, $\dot{x}$ and $\dot{y}$ for $\acute{z}$, $\acute{x}$ and $\acute{y}$ (according to the Scholium) there comes out $y^2 \dot{x}^2/a^2 + \dot{y}^2$, as before."

34 CERDÀ, Tomàs, *Tratado de Fluxiones*, "Cap. [12] Del uso de las Fluxiones para la Rectificación de las curvas"; RAH, 9/2812 f. 133r.

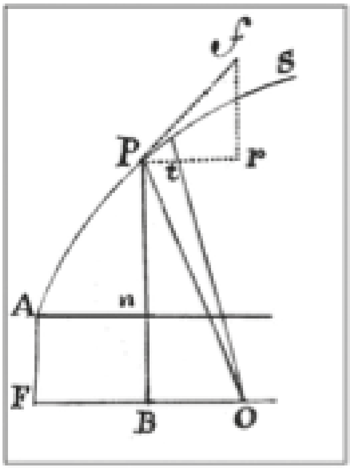

Fig. 2. CERDÀ, *Tratado de Fluxiones*, "Capítulo 8".

> *"Sean PO y tO dos Radios perpendiculares a la curva y* ***concíbanse infinitamente cerca el uno del otro****. Del punto de intersección tírese OF paralela a An y que corta a Pn alargada y a su paralela AF en los puntos B y F.*
> *Esto supuesto, haciendo PB = v, An = x, Pn = y, [AP = z], como en el caso antecedente, los Triángulos Rectángulos Prf, PBO serán semejantes, luego Pr : Pf :: PB : PO, y Pr : rf :: PB : BO, esto es,*
> *dx : dz :: v : vdz/dx = PO, y, dx : dy :: v : vdy/dx = BO ; por consiguiente FO (An+BO) = x + vdy/dx, cuyo valor perseverando constantemente el mismo (como también el de AF) en cualquier posición se contemplen los Radios PO, tO, será constante e invariable; por consiguiente su Fluxión,* $dx + (dvdy+vd^2 y) \times dx\text{-}vdyd^2 x)/dx^2 = 0$*"*[35].

A partir d'aquí s'arriba a deduir el radi de curvatura *PO* que serà

$dz^3/(dyd^2 x\text{-}d^2 ydx)$.

En aquesta demostració, en considerar que el radi de curvatura *PO* no varia per a un interval infinitament petit de temps, de fet, Cerdà i Simpson estan dient que, per aquest interval, la corba *APS* es "comporta" com un cercle. El que és rellevant és la utilització del concepte "infinitament pròxim", i, en aquest cas, són els dos autors, Simpson i Cerdà, els que fan ús dels infinitèsims.

35 CERDÀ, Tomàs, *Tratado de Fluxiones*, "Capítulo. 8 Determínense por el Método Directo de las Fluxiones los Radios de Curvatura y las Evolutas de las Curvas"; RAH, 9/2792/29 ff. 3v-4r. Hem volgut emfatitzar alguns fragments del text en negreta.

5.- Conclusions.

En primer lloc, s'ha de dir que Simpson i Cerdà són un clar exemple de com els ensenyants van participar de forma activa en la configuració del càlcul diferencial i integral com a nou camp matemàtic durant el segle XVIII. En segon lloc i en relació amb els infinitèsims, es pot observar com, en un primer moment, Newton no els va refusar quan va introduir la idea de fluxions a partir dels moments. Va ser al cap de poc temps que Newton es va allunyar d'aquests infinitèsims i aquesta tendència es va reforçar amb els seus seguidors. Els fluxionistes van evitar els infinitèsims i el tema es va convertir en un element diferenciador entre fluxionistes i leibnizians a mitjans del segle XVIII. En tercer lloc, l'intent d'evitar els infinitèsims va forçar gran part de la comunitat newtoniana a elaborar una teoria basada en la fluxió com increment finit que va aconseguir resultats rellevants a nivell conceptual. En particular, Simpson i Cerdà van assumir aquesta visió geomètrico-cinemàtica de Newton, participant en la elaboració d'un concepte de fluxió que, entre altres qüestions, evitava els infinitèsims. En quart lloc, Simpson i Cerdà, tot i partir de la concepció newtoniana, tampoc van poder sostreure's de la influència leibniziana i els infinitèsims apareixen en les seves obres en diverses ocasions.

En resum, com a primera aproximació, la distinció entre newtonians i leibnizians, en relació amb els autors matemàtics del segle XVIII, pot resultar útil, però quan s'aprofundeix en la seva obra, com s'ha intentat fer en el cas de Simpson i Cerdà, es pot comprovar que aquesta distinció esdevé menys clara. Efectivament, en el cas d'ensenyants com Cerdà, tot sembla indicar que les opcions de l'autor estaven més condicionades pel caràcter didàctic que volia imprimir a la seva obra que per principis teòrics preestablerts.

6.- Bibliografia.

6.1-Manuscrits.

- CERDÀ, Tomàs *Tratado de Fluxiones*, Real Academia de la Historia (RAH), Cortes 9/2792, 9/2812.
- CERDÀ, Tomàs (1758) *Carta a Simpson*, Barcelona, RAH, Cortes 9/2792.
- RIEGER, Christian *Introducción fácil al algoritmo de las fluxiones*, RAH, Cortes 9/2792.

- WENDLINGEN, Johannes *Elementos de Mathematicas*, Tomo VIII: Análisis de los infinitos; Tomo IX: Cálculo Exponencial, Diferencio-diferencial y Aritmética de los infinitos. RAH, Cortes 9/2812, 9/3811.

6.2.-Textos impresos.

- AUSEJO, Elena; MEDRANO SÁNCHEZ, Francisco Javier (2010) "Construyendo la Modernidad: Nuevos datos y enfoques sobre la introducción del cálculo infinitesimal en España (1717-1787)", *Llull*, vol. 33, núm. 71, 25-56.
- BERENGUER CLARIÀ, Joaquim (2015) *Tomàs Cerdà (1757-1759). Tratado de Fluxiones*, Barcelona, Reial Acadèmia de Ciències i Arts de Barcelona.
- BERENGUER CLARIÀ, Joaquim (2016) *La recepció del càlcul diferencial a l'Espanya del segle XVIII. Tomàs Cerdà: introductor de la teoria de fluxions*, Tesi doctoral, Barcelona, Universitat Autonòma de Barcelona. http://www.tdx.cat/handle/10803/367217 https://www.educacion.gob.es/teseo/mostrarRef.do?ref=1211406
- BLANCO ABELLÁN, Mónica (2013) "Thomas Simpson: Weaving fluxions in 18th-century London", *Historia Mathematica*, vol. 41, Issue 1, 38-81.
- BOS, Henk J. M. (1974) "Differentials, Higher-Order Differentials and the Derivative in the Leibnizian Calculus", *Archive for History of Exact Sciences* 26.XI, vol. 14, Issue 1, 1-90.
- BOS, Henk J. M. (1984) "Newton, Leibniz y la tradición leibniziana". Dins: GRATTAN - GUINESS, I. (ed.) *Del cálculo a la teoria de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica*, Madrid, Alianza Universidad, 69-124.
- CERDÀ, Tomàs (1758) *Liciones de Mathemática o Elementos Generales de Arithmética y Algebra para el uso de la clase*, Barcelona, por Francisco Surià, 2 toms.
- CERDÀ, Tomàs (1760) *Lecciones de mathematica o Elementos generales de Geometria para el uso de la clase*, Barcelona, por Francisco Surià.
- CERDÀ, Tomàs (1764) *Lección de Artilleria para el uso de la clase*, Barcelona, por Francisco Surià.
- CLARKE, Frances Marguerite (1929) *Thomas Simpson and his times* submitted for the degree of Doctor of Philosophy in the Faculty of Philosophy, Columbia University, Waverly Press.
- CUESTA DUTARI, Norberto (1976-1983) *Historia de la Invención del Análisis Infinitesimal y de su introducción en España*, Salamanca,

Universidad de Salamanca.

- DE LORENZO, Javier (1987) *Análisis Infinitesimal*, Madrid, Tecnos. [Inclou els textos: *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentubus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus (1684). De geometria recondita et Analysi indivibilium atque infinitorun (1686)* de Leibniz].
- FONTENELLE, Bernard le Bovier (1727) *Éléments de la Géométrie de l'infini*, Paris, l'Imprimerie Royale.
- GARCÍA DONCEL, Manuel (1998) "Los orígenes de nuestra Real Academia y los jesuitas", *Memorias de la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona*, Barcelona, Tercera Época, núm. 947, vol. LVII, n. 3.
- GASSIOT MATAS, Lluís (1996) *Tomas Cerdà i el seu "Tratado de Astronomia"*. Treball de recerca del Centre d'Estudis d'Història de les Ciències de la Universitat Autònoma de Barcelona dirigit per Manuel García Doncel.
- GUICCIARDINI, Niccolò (1999) *Reading the Principia: the debate on Newton's mathematical methods for natural philosophy from 1687 to 1736*, Cambridge University Press.
- GUICCIARDINI, Niccolò (2009) *Isaac Newton on mathematical certainty and method*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London.
- JULLIEN, Vincent (ed.) (2015) *Seventeenth-Century Indivisibles Revisited*. Springer International Publishing Switzerland.
- KNOBLOCH, Eberhard (1990) "L'infini dans les mathématiques de Leibniz", *L'infinito in Leibniz, Problemi e terminologia,* Simposio Internazionale Roma, 33–51.
- KNOBLOCH, Eberhard (2002) "Leibniz's Rigorous Foundation Of Infinitesimal Geometry By Means Of Riemannian Sums", *Synthese,* vol. 133, Issue 1, 59-73.
- KNOBLOCH, Eberhard (2006) "Beyond Cartesian limits: Leibniz's passage from algebraic to "transcendental' mathematics", *Historia Mathematica,* vol. 33, Issue 1, February, 113–131. (Disponible on-line desde 2004)
- L'HÔPITAL, Guillaume de (1696) *L'Analyse des infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbes*, Paris, l'Imprimirie Royale.
- MALET, Antoni (1996) *From Indivisibles to Infinitesimals, Studies on Seventeenth-Century Mathematizations of Infinitly Small Quantities*, Barcelona, Universitat Autònoma de Barcelona.

- MASSA-ESTEVE, Maria Rosa (2015) "The Role of Indivisibles in Mengoli's Quadratures". Dins JULLIEN, Vincent (ed.) *Seventeenth-Century Indivisibles Revisited*, Springer International Publishing Switzerland, 285-306.
- NAVARRO BROTÓNS, Víctor (2003) "Scientific activity in Spain and the Role of the Jesuits (1680-1767)". Dins: BRIZZI, Gian Paolo; GRECI, Roberto (ed.) *Gesuiti e Università in Europa (secoli XVI-XVIII*), Parma, Atti del Convegno di studi, CLUEB, Bologna, 421-434.
- NAVARRO LOIDI, Juan (2010) "*Lección de Artillería* by Tomás Cerdá and the Renovation of the Spanish Artillery during the 18th Century". In: HUNGER, Hermann; SEEBACHER, Felicitas; HOLZER, Gerhard (eds.): *Third International Conference of the European Society for the History of Science*, ESHS, Austrian Academy of Sciences, Viena, 879-890.
- NEWTON, Isaac (1671) *The Method of Fluxions and Infinite Series*, Translated from the Author's Latin original [*Tractatus de Methodis Serierum et Fluxionum*] by John Colson, M.A. and F.R.S, London, printed by Henry Woodfall. 1736.
- NEWTON, Isaac (1687) *The Mathematical Principles of Natural Philosophy*, translated into English by Andrew Motte, New York, 1846. (Títol original: *Philosophiae naturalis Principia Mathematica*. Imprimatur S. Pepys, Reg. Soc. Praeses. Londini).
- PADILLA Y ARCOS, Pedro (1756) *Curso militar de Mathematicas, sobre las partes de esas Ciencias, pertenecientes al Arte de la Guerra*, Madrid, Antonio Marín.
- PANZA, Marco (2000) *Newton et les origines de l'analyse: 1664-1666*, Paris, Institut d'Histoire et de Philosophie des Sciences et des Techniques. https://tel.archives-ouvertes.fr/ (consulta gener 2018)
- SIMPSON, Thomas (1737) *A new treatise of fluxions*, London, printed by Tho. Gardner.
- SIMPSON, Thomas (1750) *The Doctrine and Application of Fluxions*, London, printed by J. Nourse.
- SIMPSON, Thomas (1757) *Miscellaneous Tracts on Some Curious and Very Interesting Subjects*, London, printed by J. Nourse.
- WENDLINGEN, Johannes (1753-1756) *Elementos de la Mathematica* (4 volums), Madrid, Joachin Ibarra.
- WOLFF, Christian (1713-1715) *Elementa Matheseos Universae*, Genevae, apud Henricum-Albertum Gosse & socios.